Τετάρτη 22/05/2019

ΘΕΩΡΗΜΑ: Δείξτε ότι σε έναν αντιμεταθετικό δακτύλιο με μοναδιαίο στοιχείο κάθε μεγιστοτικό ιδεώδες είναι πρώτο.

Έστω M μεγιστοτικό $\Rightarrow R/M$ είναι σώμα $\Rightarrow R/M$ είναι ακέραια περιοχή $\Rightarrow M$ πρώτο.

Πρόταση: Έστω F σώμα $\Rightarrow$ F αντιμεταθετικός δακτύλιος, F έχει μοναδιαίο στοιχείο.

Έστω a, b διαιρέτες του μηδενός $\Rightarrow a \cdot b = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. $a \neq 0$, $a \in F$ σώμα $\Rightarrow a$ αντιστρέψιμο.

δηλ. $a a^{-1} = 1$ $\qquad a \cdot b = 0 \Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0$

$\Rightarrow 1 \cdot b = 0 \Rightarrow b = 0$ Άτοπο. Άρα F ακέραια περιοχή

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Υπάρχουν ιδεώδη που είναι πρώτα, αλλά δεν είναι μεγιστοτικά.

$\mathbb{Z} \longrightarrow$ δακτύλιος των ακεραίων

Το $\{0\}$ είναι πρώτο ιδεώδες του $\mathbb{Z}$

$\{0\} \neq \mathbb{Z}$. Έστω $ab \in \{0\} \Rightarrow ab = 0 \overset{\mathbb{Z}}{\Rightarrow} a = 0$ ή $b = 0$
$\Rightarrow a \in \{0\}$ ή $b \in \{0\}$. Άρα $\{0\}$ πρώτο

$\{0\} \subsetneq 2\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}$. Άρα το $\{0\}$ δεν είναι μεγιστοτικό.

Ιδεώδη του $\mathbb{Z}$: $\{0\}$, $\mathbb{Z}$ και τα $n\mathbb{Z}$ όπου n φυσικός.
Πρώτα ιδεώδη: $\{0\}$, και τα $p\mathbb{Z}$ όπου p πρώτος.
Μεγιστοτικά ιδεώδη: $p\mathbb{Z}$ όπου p πρώτος αριθμός

ΑΣΚΗΣΗ. Δείξτε ότι ένα σώμα F έχει ακριβώς δύο ιδεώδη τα F και $\{0\}$ ($1 \in F$ και $1 \neq 0 \Rightarrow 1 \notin \{0\}$ και $1 \in F$, $F \neq \{0\}$.

Έστω $I \neq \{0\}$ ιδεώδες του $F \Rightarrow I \neq \{0\}$ άρα υπάρχει $a \in I$ με $a \neq 0 \underset{F \text{ σώμα}}{\Rightarrow}$ a αντιστρέψιμο $\underset{\in F}{a^{-1}} \cdot \underset{\in I}{a} = 1 \in I$

$I = F$

Έστω $r \in F \Rightarrow r = \underset{\in F}{r} \cdot \underset{\in I}{1} \in I \Rightarrow F \subseteq I \subseteq F \Rightarrow I = F$

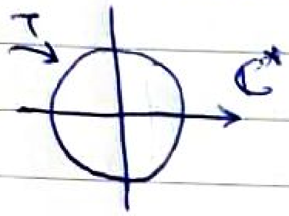
ΑΣΚΗΣΗ 6 φυλ. 8

Θεωρούμε την υποομάδα T της ομάδας $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ όπου

$$T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

Δείξτε ότι η υποομάδα T είναι κανονική και ότι $\mathbb{C}^*/T \simeq \mathbb{R}^+$

θετικοί πραγματικοί αριθμοί



$$\mathbb{C}^* \xrightarrow[\text{ομομορφισμός ομάδων}]{\varphi} \mathbb{R}^+$$

$$\varphi(z) = |z|$$

Αν $z \in \mathbb{C}^* \Rightarrow z \neq 0 \Rightarrow |z| \neq 0 \Rightarrow |z| \in \mathbb{R}^+$ άρα φ καλά ορισμένη.

$\varphi(z_1 z_2) = |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = \varphi(z_1) \cdot \varphi(z_2)$ Άρα φ ομομορφισμός ομάδων

$\operatorname{Ker}\varphi = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \varphi(z) = 1\} = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\} = T$

Άρα $\operatorname{Ker}\varphi = T \Rightarrow T = \operatorname{Ker}\varphi$ είναι υποομάδα του $\mathbb{C}^*$ και μάλιστα κανονική.

Έστω $r \in \mathbb{R}^+$ $r = |r| = \varphi(\underset{\in \mathbb{C}^*}{r})$. Άρα φ επί

Άρα $\mathbb{C}^*/\operatorname{Ker}\varphi \simeq \varphi(\mathbb{C}^*) \Rightarrow \mathbb{C}^*/T \simeq \mathbb{R}^+$

Ασκηση 4.5 φυλλάδιο 9

Βρείτε όλους τους διαιρέτες του μηδενός και όλα τα αντιστρέψιμα στοιχεία του $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$

δεν είναι είναι

$([0]_2, [0]_4)$, $([0]_2, [1]_4)$, $([0]_2, [2]_4)$, $([0]_2, [3]_4)$ $([1]_2, [0]_4)$
$([1]_2, [1]_4)$, $([1]_2, [2]_4)$, $([1]_2, [3]_4)$

Αντιστρέψιμο: $([1]_2, [1]_4)$, $([1]_2, [3]_4)$

Διαιρέτες του μηδενός: $([0]_2, [1]_4)$, $([1]_2, [0]_4)$, $([0]_2, [2]_4)$, $([0]_2, [3]_4)$
$([1]_2, [2]_4)$

ΑΣΚΗΣΗ Δείξτε ότι η $H = \langle([2]_6, [3]_6)\rangle$ είναι κανονική υποομάδα της $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$ και βρείτε ποια γνωστή σας ομάδα είναι ισόμορφη η $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 / H$.

H είναι η κυκλική ομάδα που παράγεται από το $\langle [2]_6, [3]_6 \rangle$ συνεπώς είναι υποομάδα της αβελιανής $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$ άρα είναι κανονική
$H = \{([0]_6, [0]_6), ([2]_6, [3]_6), ([4]_6, [0]_6), ([0]_6, [3]_6), ([2]_6, [0]_6), ([4]_6, [3]_6)\}$

Άρα $|\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 / H| = \dfrac{|\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6|}{|H|} = \dfrac{36}{6} = 6$

$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 / H = \{([a]_6, [b]_6) + H\}$ $\quad o(([1], [1]) + H)$

$$\left.\begin{array}{l} 1(([1], [1]) + H) = ([1], [1]) + H \neq ([0], [0]) + H \\ 2(([1], [1]) + H) = ([2], [2]) + H \neq ([0], [0]) + H \\ 3(([1], [1]) + H) = ([3], [3]) + H \neq ([0], [0]) + H \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} o(([1], [1]) + H) / 6 \\ o \in \{1, 2, 3, 6\} \text{ lagrange} \end{array}$$

$\vdots$

$6(([1], [1]) + H) = ([6], [6]) + H = ([0], [0]) + H$

Άρα $o(([1]_6, [1]_6) + H) = 6$ Άρα $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 / H = \langle([1]_6, [1]_6) + H\rangle$
Άρα $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 / H$ κυκλική $\Rightarrow \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 / H \cong \mathbb{Z}_6$

Ασκηση Εστω D_1, D_2 ακέραιες περιοχές με $1_{D_1} \neq 0_{D_1}$ και $1_{D_2} \neq 0_{D_2}$. Δείξτε ότι $D_1 \times D_2$ δεν είναι ακέραια περιοχή

$$\underbrace{(1_{D_1}, 0_{D_2})}_{\neq (0,0)} \underbrace{(0_{D_1}, 1_{D_2})}_{\neq (0,0)} = (0_{D_1}, 0_{D_2})$$

Ασκηση 5 φυλ 7
Να δείξετε ότι κάθε στοιχείο $\sigma \in A_n$, $n \geq 3$ μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο 3-κύκλων

$\sigma \in A_n \rightarrow \sigma = (\tau_1 \tau_2)(\tau_3 \tau_4) \quad (\tau_{2\lambda-1} \tau_{2\lambda}) \quad (\tau_{2k-1} \tau_{2k})$

1) $\tau_{2\lambda-1} \tau_{2\lambda} = (i,j)(i,j) = (1,2,3)(1,3,2)$
2) $\tau_{2\lambda-1} \tau_{2\lambda} = (i,j)(i,k) = (i,k,j)$
3) $\tau_{2\lambda-1} \tau_{2\lambda} = (i,j)(k,l) = (i,k,j)(i,k,l)$

$(a,b,\gamma)(a,b,\delta) = (a,\gamma)(b,\delta)$

Αρα το $\tau_{2\lambda-1} \tau_{2\lambda}$ είναι γινόμενο 3-κυκλων. Συνεπώς το $\sigma = \tau_1 \tau_2 \ldots \tau_{2k-1} \tau_{2k}$ είναι γινόμενο 3-κυκλων

Ασκηση Να εξετάσετε αν η απεικονιση $\varphi: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{21}$ με τύπο $\varphi(m,n) = [7m + 15n]_{21}$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων. Αν ναι δείξτε ότι $\ker\varphi = \{(3a, 7b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

$\varphi((m_1,n_1)+(m_2,n_2)) = \varphi(m_1+m_2, n_1+n_2) = [7(m_1+m_2) + 15(n_1+n_2)]_{21} =$
$= [7m_1 + 15n_1]_{21} + [7m_2 + 15n_2]_{21} = \varphi((m_1,n_1)) + \varphi((m_2,n_2))$

$\varphi((m_1,n_1)(m_2,n_2)) = \varphi(m_1m_2, n_1n_2) = [7(m_1m_2) + 15n_1n_2]_{21} = [49m_1m_2 + 105m_1n_2 + 105n_1m_2$
$+ 225n_1n_2]_{21} = [7m_1 + 15n_1]_{21}[7m_2 + 15n_2]_{21} = \varphi((m_1,n_1))\varphi((m_2,n_2))$

Αρα φ ομομορφισμός δακτυλίων

($\supseteq$) Εστω $(3a, 7b) \in \{(3a,7b) \mid a,b \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow \varphi(3a, 7b) = [7 \cdot 3a + 15 \cdot 7b]_{21} = [21a + 105b]_{21}$
$= [0]_{21}$
Αρα $\{(3a,7b) \mid a,b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \ker\varphi$

Έστω $(m,n) \in Ker\varphi \Rightarrow \varphi((m,n)) = [0]_{21} \Rightarrow [7m+15n] = [0]_{21}$

$7m + 15n \equiv 0 \bmod 21 \Rightarrow 21 \mid 7m + 15n$

$3 \mid 21 \quad 21 \mid 7m+15n \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3 \mid 7m+15n \\ 3 \mid 15n \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3 \mid 7m \\ \mu.\kappa.\delta(3,7)=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3 \mid m.$

$7 \mid 21 \quad 21 \mid 7m+15n \Rightarrow \left.\begin{matrix} 7 \mid 7m+15n \\ 7 \mid 7m \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 7 \mid 15n \\ \mu.\kappa.\delta(7,15)=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 7 \mid n.$

Άρα $Ker\varphi \subseteq \{(3a, 7b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Άσκηση: Βρείτε μια υποομάδα της S_{11} τάξης 28 και δείξτε ότι η S_{11} δεν έχει υποομάδα τάξης 17.

$H = \langle (1,2,3,4)(5,6,7,8,9,10,11) \rangle$. $\quad o((1,2,3,4)(5,6,7,8,9,10,11)) = E.K.\Pi(4,7) = 28$

Βρείτε μια υποομάδα τάξης 24 της S_{11}

$H = \langle (1,2,3)(4,5,6,7,8,9,10) \rangle$

· Έστω $H \leq S_{11}$ με $|H| = 17 \xrightarrow{Lagrange} |H| \mid |S_{11}| \Rightarrow 17 \mid 11!$ Άτοπο.

Άρα δεν υπάρχει υποομάδα της S_{11} τάξης 17.